## 基础课49 直线与圆锥曲线的位置关系

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. 若直线与圆没有交点，则过点的直线与椭圆的交点的个数为（ B ）.

A. 0或1 B. 2 C. 1 D. 0

[解析]由题意得，则，所以点 在以原点为圆心，2为半径的圆内，即在椭圆内部，所以过点 的直线与该椭圆必有2个交点.故选.

2. 已知抛物线的准线为，与轴交于点，直线与抛物线交于，两点，则的面积为（ B ）.

A. B. C. D.

[解析]由题意知准线 的方程为，点，由，

，得，所以,

所以.故选.

3. 若过点作直线与抛物线只有一个公共点，则这样的直线有（ B ）.

A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 无数条

[解析]由题意，得点 恰好在抛物线 上，

当直线 的斜率不存在时，直线 的方程为，此时直线与抛物线有两个交点，不满足题意.

当直线 与 轴平行时，此时直线 与抛物线只有一个公共点，满足题意.

因为点 在抛物线上，过点 有且仅有1条切线，所以满足与抛物线只有一个公共点.

故与抛物线只有一个公共点的直线只有2条.故选.

4. 已知双曲线与斜率为1的直线交于，两点，若线段的中点为，则双曲线的离心率（ C ）.

A. B. C. D.

[解析]设,，则,，

所以.

又线段 的中点为，

所以,，所以.由题意知，

所以，即，则双曲线 的离心率.

故选.

5. 已知是抛物线的焦点，是抛物线上一点，的延长线交轴于点.若，，则抛物线的方程为（ B ）.

A. B. C. D.

[解析]由抛物线，可得焦点,，准线方程为.

作 垂直 轴于点（图略），因为，，所以 为线段 的三等分点，且，由，得，即，所以，所以抛物线 的方程为.故选.

6. 已知椭圆的左、右焦点分别为，，过且斜率为1的直线交椭圆于，两点，则（ A ）.

A. B. C. D.

[解析]设直线 的方程为，代入椭圆 的方程，

整理可得，设,，

则，，根据弦长公式有.故选.

7. 已知抛物线的焦点为，若直线与交于，两点，且，则（ C ）.

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

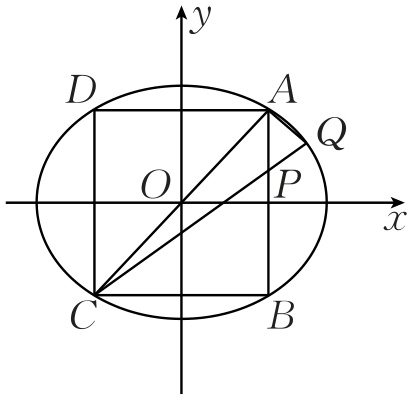
[解析]将 代入抛物线 的方程，解得，所以，解得，

由抛物线的定义可得.故选.

8. （改编）已知四边形为椭圆的内接矩形，其中点,关于轴对称，点满足，直线交椭圆于点异于点，且，则椭圆的离心率为（ A ）.

A. B. C. D.

[解析]如图所示，设，因为四边形 为矩形，点,关于 轴对称，所以，，则.



由，可得,.

设，因为点,在椭圆上，所以 两式相减，整理可得，所以.

因为，所以.

因为，所以，即.

因为，所以，即，所以椭圆 的离心率.故选.

#### 综合提升练

9. （多选题）已知点，，若某直线上存在点，使得，则称该直线为“好直线”.下列直线为“好直线”的是（ BD ）.

A. B. C. D.

[解析]因为，，，所以点 在以，为焦点的双曲线的右支上，且，，即，，所以，

所以双曲线的标准方程为，渐近线方程为.

对于，为双曲线的一条渐近线，故与双曲线没有交点，故 不是“好直线”；

对于，联立 消去 得，解得 即,，所以直线 是“好直线”；

对于，联立 消去 并整理得，，且

故直线 与双曲线 的左支有两个交点，与右支没有交点，故 不是“好直线”；

对于，联立 消去 并整理得，，且

故直线 与双曲线 的右支有两个交点，故 是“好直线”.故选.

10. （多选题）已知抛物线的焦点到准线的距离为2，则（ ACD ）.

A. 焦点的坐标为

B. 过点恰有2条直线与抛物线有且只有一个公共点

C. 直线与抛物线相交所得的弦长为8

D. 抛物线与圆交于,两点，则

[解析]由题意知抛物线 的方程为，

对于，焦点 的坐标为，故 正确；

对于，过点 有2条直线与抛物线相切，还有直线，共3条直线与抛物线有且只有一个交点，故 错误；

对于，由 得，

弦长为，故 正确;

对于，由 得，解得 或（舍去），交点为 或，则，故 正确.故选.

11. 若双曲线上存在两个点关于直线对称，则实数的取值范围为,,.

[解析]依题意，设双曲线上两点，，

若点,关于直线 对称，

则设直线 的方程为，代入双曲线的方程，化简得，

则，且，解得，且.

又，设线段 的中点，

所以，.

因为线段 的中点 在直线 上，

所以，所以，又，

所以，即,，所以，

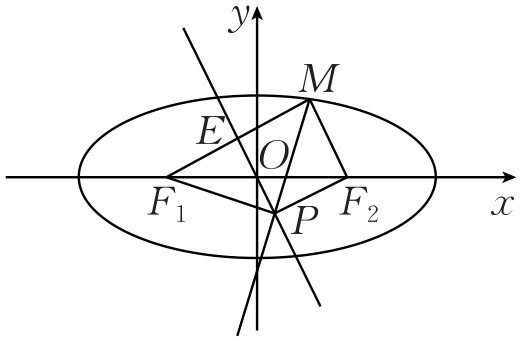
所以，整理得，

又,所以 或.

故实数 的取值范围为,,.

12. 已知是椭圆上异于顶点的动点，，分别为椭圆的左、右焦点，为坐标原点，为的中点，的平分线与直线交于点，则四边形的面积的最大值为2.

[解析]如图，由椭圆 的方程可得，，所以，



故，.

又 平分，所以点 到，的距离相等，设为，则，

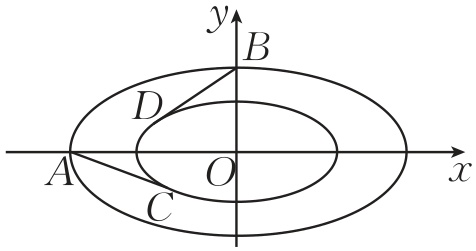
设，则，.

由 是 的中位线，易得，

即，由椭圆的性质易知，存在 为椭圆 上异于顶点的动点，使得，此时 有最大值，最大值为2.

#### 应用情境练

13. 国家体育场“鸟巢”的钢结构鸟瞰图的内外两圈的钢骨架是离心率相同的两个椭圆，若由外层椭圆长轴一端点和短轴一端点分别向内层椭圆引切线，（如图），且两切线斜率之积等于，则椭圆的离心率为  .



[解析]设内层椭圆的方程为，由内外层椭圆的离心率相同，可设外层椭圆的方程为，

,.设切线 的方程为，切线 的方程为，

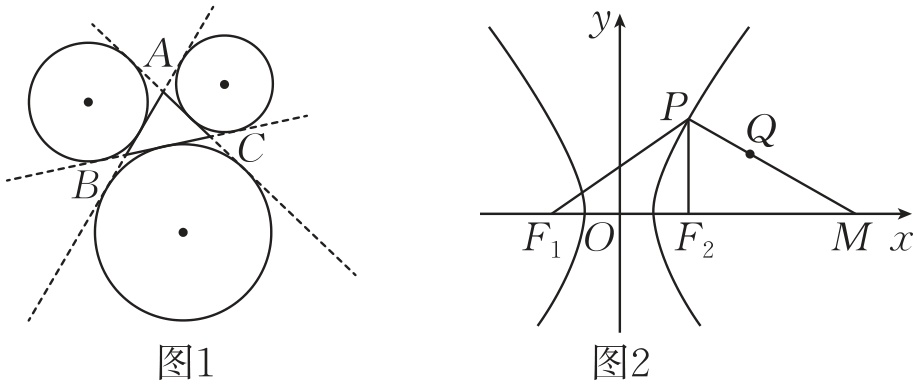
整理得， 直线 与椭圆相切，

，知，

整理得，同理可得，，

，即，故.

14. 与三角形的一条边以及另外两条边的延长线都相切的圆被称为三角形的旁切圆，旁切圆的圆心被称为三角形的旁心，每个三角形都有三个旁心，如图1所示.已知，分别是双曲线的左、右焦点，是该双曲线右支上的一点，是的一个旁心，如图2所示，直线与轴交于点，则  .



[解析]在双曲线 中，，，所以，，所以，由三角形的旁心的定义，可知,分别平分,.

在 中，由正弦定理可得.

在 中，由正弦定理可得.

因为 ,，

所以,，

所以.

同理，可得，

所以.

又因为，所以.

#### 创新拓展练

15. 已知离心率为的椭圆与直线的两个交点分别为，，是椭圆上不同于,的一点，且直线，的倾斜角分别为 ， ，若 ，则  .

[解析]设，，，

，，两式相减整理得，即，.

，

.

16*.*(2024·九省适应性测试)已知抛物线*C*:*y*2*=*4*x*的焦点为*F*,过*F*的直线*l*交*C*于*A*,*B*两点,过*F*与*l*垂直的直线交*C*于*D*,*E*两点,其中*B*,*D*在*x*轴上方,*M*,*N*分别为*AB*,*DE*的中点*.*

(1)证明:直线*MN*过定点*.*

(2)设*G*为直线*AE*与直线*BD*的交点,求△*GMN*面积的最小值*.*

[解析](1)由*C*:*y*2*=*4*x*,得*F*(1,0),由直线*AB*与直线*DE*垂直,

故两条直线的斜率都存在且不为0,

设直线*AB*,*DE*的方程分别为*x=m*1*y+*1,*x=m*2*y+*1,则*m*1*m*2*=-*1,

设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),*E*(*x*3,*y*3),*D*(*x*4,*y*4),

联立

消去*x*可得*y*2*-*4*m*1*y-*4*=*0,*Δ=*16*+*16*>*0,

故*y*1*+y*2*=*4*m*1,*y*1*y*2*=-*4,

则*x*1*+x*2*=m*1*y*1*+*1*+m*1*y*2*+*1*=m*1(*y*1*+y*2)*+*2*=*4*+*2,

故*=*2*+*1,*=*2*m*1,

即*M*(2*+*1,2*m*1),同理可得*N*(2*+*1,2*m*2)*.*

当2*+*1≠2*+*1时,

则*lMN*:*y=*(*x-*2*-*1)*+*2*m*1,

即*y=*(*x-*2*-*1)*+*2*m*1*=-+=-*,

由*m*1*m*2*=-*1,得*y=-=*(*x-*3),

故当*x=*3时,*y=*(3*-*3)*=*0,

此时直线*MN*过定点,且该定点为(3,0);

当2*+*1*=*2*+*1,即*=*时,由*m*1*m*2*=-*1,得或

则*=*3,*=*3,故*lMN*:*x=*3,亦过定点(3,0)*.*

故直线*MN*过定点,且该定点为(3,0)*.*

(2)由*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),*E*(*x*3,*y*3),*D*(*x*4,*y*4),

得*lAE*:*y=*(*x-x*1)*+y*1,由*=*4*x*1,*=*4*x*3,

得*y=**x-**+y*1*=-+=+*,

同理可得*lBD*:*y=+*,联立

则*+=+*,

即4*x*(*y*4*+y*2)*+y*1*y*3(*y*4*+y*2)*=*4*x*(*y*3*+y*1)*+y*2*y*4(*y*3*+y*1),

则*x=*,由*y*1*y*2*=-*4,*y*3*y*4*=-*4,

得*x==*

*==-*1,

故*xG=-*1,

如图,过点*G*作*GQ*∥*x*轴,交直线*MN*于点*Q*,则*S*△*GMN=|yM-yN|×|xQ-xG|*,

由*M*(2*+*1,2*m*1),*N*(2*+*1,2*m*2),

得*|yM-yN|=|*2*m*1*-*2*m*2*|=*2*|m*1*|+*≥2*=*4,

当且仅当*|m*1*|=*1时,等号成立*.*

下证*|xQ-xG|*≥4:

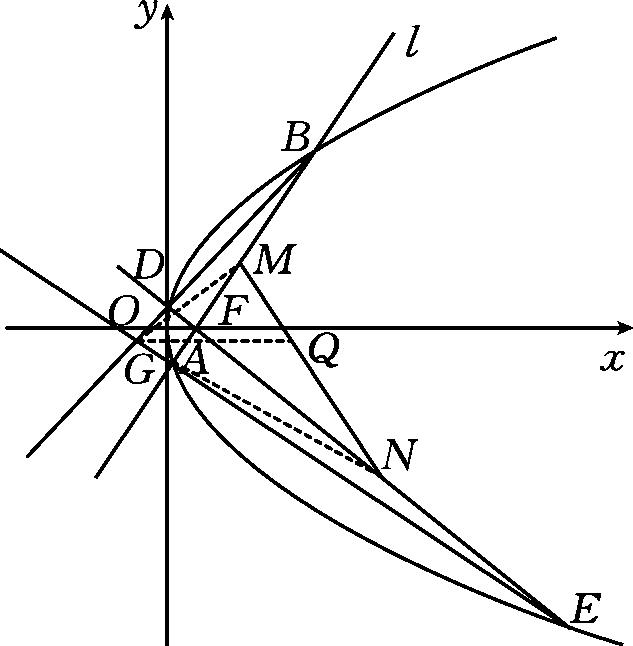
由抛物线的对称性,不妨设*m*1*>*0,则*m*2*<*0,

当*m*1*>*1时,*m*2*=-*∈(*-*1,0),则点*G*在*x*轴上方,点*Q*亦在*x*轴上方,

有*=>*0,由直线*MN*过定点(3,0),

得*|xQ-xG|>*3*-*(*-*1)*=*4,

同理,当*m*1*<*1时,点*G*在*x*轴下方,点*Q*亦在*x*轴下方,



则*<*0,故*|xQ-xG|>*4,

当且仅当*m*1*=*1时,*xQ=*3*.*

故*|xQ-xG|*≥4恒成立,且当*|m*1*|=*1时,等号成立,

所以*S*△*GMN=|yM-yN|×|xQ-xG|*≥*×*4*×*4*=*8*.*